

# Run-aways im Neutralgas\*

Von G. ECKER und K. G. MÜLLER

Aus dem Institut für theoretische Physik, Universität Bonn  
(Z. Naturforsch. 16 a, 246—252 [1961]; eingegangen am 11. November 1960)

The motion of electrons as determined by the field acceleration and the elastic and inelastic collisions with the gas atoms is calculated from the BOLTZMANN equation. We derive the average velocity and the scattering ellipsoid as a function of time. For particles starting from rest there exists always a critical electric field  $E_c$  depending on pressure and temperature. Below this critical value electrons approach the stationary drift process. Above the critical value the electrons do not reach a stationary state, they "run away". For a finite initial velocity  $v_0$  and a field below the critical value  $E_c$  the particles are either accelerated to drift, or decelerated to drift, or "run away", depending on the value  $v_0$ . From a calculation of the scattering parameters we find for  $E > E_c$  a focussing effect in the velocity space which increases with field strength. Also the relaxation time for the drift process and the stopping power for electron beams can be calculated. Applications to the glow discharge are discussed.

Die stationäre Elektronendrift im Gas ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Die vorliegende Arbeit berechnet, in welcher Weise und unter welchen Bedingungen diese stationären Vorgänge erreicht werden. Das Verständnis dieses Fragenkomplexes ist wesentlich für die Beurteilung von Elektronenstrahlen, *run-aways* und Relaxationsstrecken im Neutralgas.

Wir legen unserer Berechnung ein eindimensionales Modell zugrunde. Das elektrische Feld hat die Richtung der  $z$ -Achse. Der Feldraum ist gleichmäßig mit einem Neutralgas erfüllt. Die Elektronen treten an der Stelle  $z=0$  mit vorgeschriebener Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  in den Feldraum ein.

Zur Charakterisierung des Bewegungszustandes der Elektronen verwenden wir die folgenden drei Kenngrößen:

- I. die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$ ,
- II. das Streumoment senkrecht zur Feldrichtung  
 $\overline{v_x^2} \equiv s_x^2 = \overline{v_y^2} \equiv s_y^2$ ,
- III. das Streumoment in der Feldrichtung  
 $(\overline{v_z} - \bar{v})^2 = \overline{v_z^2} - \bar{v}^2 \equiv s_z^2$ .

In der  $z$ -Abhängigkeit dieser Kenngrößen spiegelt sich das nichtstationäre Verhalten des einzelnen Elektrons wider.

## Bezeichnungen

$A$	Feldparameter,
$A_c$	kritischer Feldparameter,
$c$	Relativgeschwindigkeit Elektron—Atom,
$e$	elektrisches Elementarquantum,
$\mathcal{E}$	elektrisches Feld,
$f, F$	Verteilungsfunktion der Elektronen bzw. Atome,
$F_a$	Atomformfaktor,
$g$	Verteilungsfunktion der Elektronen,
$h$	PLANCKSches Wirkungsquantum,
$J$	Stoßintegral der Transportgleichung,

$\hat{f}$	Einheitsvektor in $z$ -Richtung,
$l_{x,z}$	Defokussierungslänge,
$m, M$	Masse der Elektronen bzw. der Atome,
$n, N$	Dichte der Elektronen bzw. der Atome,
$q$	Stoßquerschnitt,
$s_{x,z}$	Streumoment,
$\bar{U}$	effektives Energieniveau des Atoms,
$v, \mathfrak{V}$	Geschwindigkeit der Elektronen bzw. der Atome,
$v_a, v_b$	kritische Werte der Elektronengeschwindigkeit,
$\bar{v}_0$	Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen,
$x, y, z$	Koordinaten,
$Z$	Kernladungszahl,
$d^3v, d^3V$	Volumenelement im Geschwindigkeitsraum der Elektronen bzw. der Atome,
$d^2\Omega$	Raumwinkelement des Stoßvorganges,
$\gamma$	relative Streuung,
$\delta$	DIRAC-Funktion,
$\Delta v$	Abweichung von der mittleren Elektronengeschwindigkeit,
$\varepsilon$	Abweichung von der gerichteten Elektronenbewegung,
$\eta$	Variable des differentiellen Wirkungsquerschnitts,
$\sin^2 \mu$	relativer Energieverlust,
$\sigma$	differentieller Wirkungsquerschnitt,
$\Phi$	Funktion der Elektronengeschwindigkeit,
$\chi$	Stoßwinkel.

## Grundlagen der Berechnung

Wir verwenden die bekannte BOLTZMANNsche Transportgleichung für eine beliebige Funktion  $\Phi$  der Geschwindigkeit

$$\operatorname{div}_r(n \mathfrak{v} \Phi) + n \left( -\frac{e}{m} \mathcal{E} \cdot \operatorname{grad}_v \right) \Phi = \iiint (\Phi' - \Phi) F(\mathfrak{V}) f(v) c \sigma d^2\Omega d^3V d^3v. \quad (1)$$

Zur Bestimmung der Kenngrößen I—III schreiben wir Gl. (1) nacheinander für

- a)  $\Phi = 1$ ; b)  $\Phi = v$ ; c)  $\Phi = v^2$ ; d)  $\Phi = v_x^2$  an.

\* This research was supported in part by the United States Department of Army, through its European Research Office.



Bei der Auswertung dieser Gleichungen berücksichtigen wir die folgenden Beziehungen

$$M \gg m; \quad V \ll v; \quad F(\mathfrak{B}) = F(-\mathfrak{B}).$$

Die linke Seite der Gl. (1) schreibt sich für die Fälle a) bis d) in der Form

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{div}_r(n \bar{v}) + n \left( \frac{e}{m} \overline{\mathfrak{E} \cdot \operatorname{grad}_v} \right) 1 &= \frac{\partial}{\partial z} (n \bar{v}_z), \\ \text{b) } \operatorname{div}_r(n \bar{v} \bar{v}) + n \left( \frac{e}{m} \overline{\mathfrak{E} \cdot \operatorname{grad}_v} \right) \bar{v} &= \left[ \frac{\partial}{\partial z} (n \bar{v}_z^2) + n \frac{e}{m} E \right] \bar{v}, \\ \text{c) } \operatorname{div}_r(n \bar{v} \bar{v}^2) + n \left( \frac{e}{m} \overline{\mathfrak{E} \cdot \operatorname{grad}_v} \right) \bar{v}^2 &= \frac{\partial}{\partial z} (n \bar{v}_z \bar{v}^2) + 2 n \frac{e}{m} E \bar{v}_z, \\ \text{d) } \operatorname{div}_r(n \bar{v} \bar{v}_x^2) + n \left( \frac{e}{m} \overline{\mathfrak{E} \cdot \operatorname{grad}_v} \right) \bar{v}_x^2 &= \frac{\partial}{\partial z} (n \bar{v}_z \bar{v}_x^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Der Stoßterm  $J$  dagegen bedarf der Diskussion.

Wir spalten zunächst das Stoßglied in zwei Anteile auf, die den elastischen und inelastischen Stößen zugeordnet sind:

$$\sigma = \sigma_i + \sigma_e. \quad (3)$$

Die Auswertung der elastischen Anteile  $J_e$  an Hand wohl bekannter Verfahren führt zu

$$\begin{aligned} \text{a) } J_e &= 0, \\ \text{b) } J_e &= -\bar{f} N \int v_z v q_{1e} f(v) d^3v, \\ \text{c) } J_e &= -2 N \int \left( \frac{m}{M} v^2 - \bar{V}^2 \right) v q_{1e} f(v) d^3v, \\ \text{d) } J_e &= -2 N \int \left( \frac{m}{M} v_x^2 - \bar{V}_x^2 \right) v q_{1e} f(v) d^3v \\ &\quad + \frac{1}{3} N \int (v^2 - 3 v_x^2) v q_{2e} f(v) d^3v. \end{aligned} \quad (4)$$

Hier haben wir die Stoßquerschnitte verwendet

$$q_{1e} = \int (1 - \cos \chi) \sigma_e d^2\Omega, \quad (5)$$

$$q_{2e} = \frac{3}{2} \int \sin^2 \chi \sigma_e d^2\Omega. \quad (6)$$

Zur Beschreibung der inelastischen Stöße benutzen wir das folgende Modell<sup>1-3</sup>. Alle Energieniveaus des zu untersuchenden Atoms werden durch einen einzigen effektiven Energieterm der Anregungsspannung  $\bar{U}$  ersetzt. Die Anregungswahrscheinlichkeit für diesen Energieterm wird mit der Gesamtanregungswahrscheinlichkeit des Atoms identifiziert. Unter Verwendung der Abkürzung

$$\sin^2 \mu = 2 e \bar{U} / m v^2 \quad (7)$$

berechnen wir die inelastischen Stoßglieder  $J_i$

$$\begin{aligned} \text{a) } J_i &= 0, \\ \text{b) } J_i &= -\bar{f} N \int v_z v q_{1i} f(v) d^3v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } J_i &= -2 N \int \left( \frac{m}{M} v^2 - \bar{V}^2 \right) v q_{1i} f(v) d^3v \\ &\quad - N \int v^3 q_{0i} f(v) d^3v, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{d) } J_i &= -2 N \int \left( \frac{m}{M} v_x^2 - \bar{V}_x^2 \right) v q_{1i} f(v) d^3v \\ &\quad + \frac{1}{3} N \int (v^2 - 3 v_x^2) v q_{2i} f(v) d^3v \\ &\quad - N \int v_x^2 v q_{0i} f(v) d^3v. \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$q_{0i} = \sin^2 \mu \int \sigma_i d^2\Omega, \quad (9)$$

$$q_{1i} = \int (1 - \cos \mu \cos \chi) \sigma_i d^2\Omega, \quad (10)$$

$$q_{2i} = \frac{3}{2} \int \cos^2 \mu \sin^2 \chi \sigma_i d^2\Omega. \quad (11)$$

### Die Berechnung der Stoßquerschnitte

Die Auswertung der Beziehungen (5) – (6) und (9) – (11) erfordert die Kenntnis des differentiellen Stoßquerschnittes. Im Bereich hoher Geschwindigkeiten läßt sich diese Größe an Hand der BORNschen Näherung bestimmen. Mit abnehmender Geschwindigkeit jedoch werden Polarisations- und Verzerreffekte von Bedeutung. Schließlich weicht das Resultat infolge quantenmechanischer Beugungsphänomene vollständig von der BORNschen Näherung ab.

Aus der experimentellen Erfahrung lassen sich nur geringe Anhaltspunkte für die Größen  $q$  gewinnen. Die Messung erfaßt nahezu ausschließlich den totalen Stoßquerschnitt:

$$q_t = \int \sigma d^2\Omega. \quad (12)$$

Dennoch ist es möglich, aus dem bekannten theo-

charge, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1957.

<sup>3</sup> W. P. ALLIS u. S. C. BROWN, Phys. Rev. **87**, 419 [1952].

<sup>1</sup> H. KOPPE, Z. Phys. **124**, 658 [1948].

<sup>2</sup> W. ELENBAAS, The High Pressure Mercury Vapour Dis-

retischen und experimentellen Material die gewünschten Stoßquerschnitte als Funktion der Geschwindigkeit zu bestimmen. Im Bereich hoher Geschwindigkeiten liefert die BORNsche Näherung für elastische und inelastische Stöße die Beziehungen<sup>4-6</sup>

$$\sigma_e = \frac{Z^2 e^4 m^2}{4 h^4} \frac{(1 - F_a)^2}{\eta^4}, \quad (13)$$

$$\sigma_i = \frac{Z e^4 m^2}{4 h^4} \frac{(1 - F_a^2)}{\eta^4} \quad (14)$$

mit  $\eta = \frac{m v}{h} \sin \chi/2$ . (15)

Die Atomformfaktoren  $F_a$  können den Arbeiten<sup>7,8</sup> entnommen werden. Bekanntlich stellen die Beziehungen (13), (14) nur oberhalb eines gewissen Minimalwertes  $\eta_{\min}$  eine ausreichende Näherung dar. Dieser Wert wächst mit der Ordnungszahl des Atoms und bestimmt bei vorgegebener Geschwindigkeit  $v$  einen unteren Grenzwinkel  $\chi_{\min}$ . Die Stoßquerschnitte lassen sich daher mit Hilfe von (13), (14) zuverlässig berechnen, wenn der Bereich unterhalb  $\chi_{\min}$  nur unwesentlich zur Integration beiträgt. Im Bereich hoher Geschwindigkeiten ist dies für die Querschnitte  $q_1$  und  $q_2$  sowie  $q_{0e}$  hinreichend erfüllt. Jedoch gilt dies nicht für den Stoßquerschnitt  $q_{0i}$ . Diese Größe muß daher aus dem experimentell

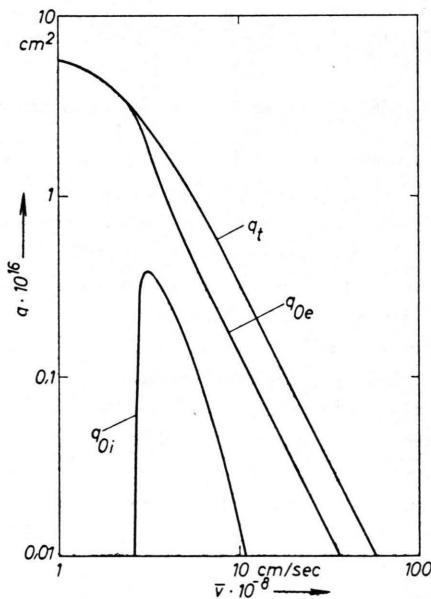


Abb. 1.

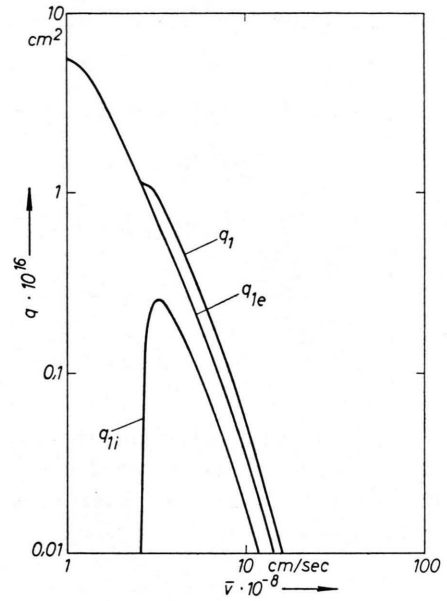


Abb. 2.

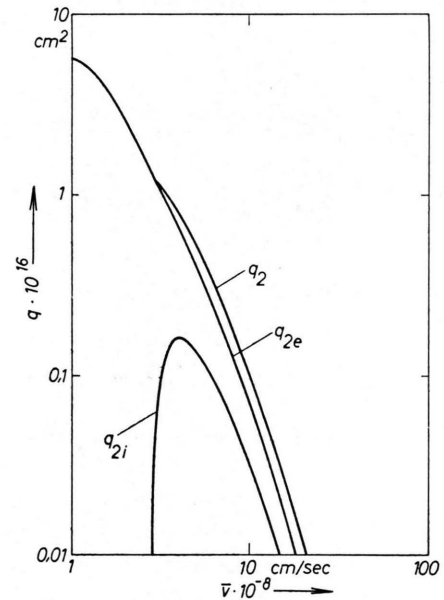


Abb. 1—3. Die verschiedenen Stoßquerschnitte von neutralem Helium für Elektronen als Funktion der Geschwindigkeit.

bekannten  $q_t$  und dem berechneten  $q_{0e}$  ermittelt werden.

Im Bereich kleiner Geschwindigkeiten ist  $q_{0e}$  und  $q_{0i}$  ausreichend aus der experimentellen Erfahrung

<sup>4</sup> E. U. CONDON u. P. M. MORSE, Rev. Mod. Phys. **3**, 43 [1931]; P. M. MORSE, Rev. Mod. Phys. **4**, 577 [1932].

<sup>5</sup> A. L. HUGHES u. W. HARRIS, Phys. Rev. **48**, 408 [1935].

<sup>6</sup> N. F. MOTT u. H. S. W. MASSEY, The Theory of Atomic Collisions, Clarendon Press, Oxford 1950.

<sup>7</sup> R. W. JAMES u. G. W. BRINDLEY, Phil. Mag. **12**, 81 [1931].

<sup>8</sup> H. WYRICH u. F. LENZ, Z. Naturforsch. **13 a**, 515 [1958].

bekannt. Verwenden wir die experimentell und theoretisch gesicherte Tatsache<sup>9, 10</sup>, daß der differentielle Stoßquerschnitt bei kleinen Geschwindigkeiten winkelunabhängig ist, so lassen sich  $q_1$  und  $q_2$  aus  $q_0$  folgern.

Wir haben die skizzierte Rechnung ausgeführt für den Fall von Heliumatomen, wo die Verhältnisse wegen der niedrigen Ordnungszahl günstig liegen. Das Ergebnis zeigen die Abb. 1 bis 3.

### Die Berechnung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$

Gl. (1) liefert mit (2 b), (4 b) und (8 b) die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial z} (n \bar{v}^2) + n \frac{e}{m} E = -N \int v_z v q_1(v) f(v) d^3v. \quad (16)$$

Wir zerlegen die Verteilungsfunktion in der Form

$$f(v) = n [(1 - \epsilon) \delta(v - \bar{v}) + g(v - \bar{v})] \quad (17)$$

$$\text{mit} \quad \int g(v - \bar{v}) d^3v = \epsilon. \quad (18)$$

Im Hinblick auf unsere Anwendungen setzen wir

$$\int (v - \bar{v})^2 g(v - \bar{v}) d^3v \ll \bar{v}^2 \quad (19)$$

voraus. Die Berechtigung dieser Voraussetzung wird bei allen Berechnungen geprüft.

Gl. (16) schreibt sich dann in der Form

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \bar{v}^2 + \frac{e}{m} E = -N \bar{v}^2 q_1(\bar{v}). \quad (20)$$

Mit der Abkürzung

$$A = \frac{e}{m N} |E| = 1,82 \cdot 10^{-4} \left| \frac{E}{p} \right| T \quad (21)$$

erhalten wir die Beziehung

$$\frac{d\bar{v}^2}{A - \bar{v}^2 q_1(\bar{v})} = 2 N dz. \quad (22)$$

Wegen der negativen Elektronenladung wählen wir das Feld in der negativen  $z$ -Richtung. Der Verlauf der Funktion  $\bar{v}^2 q_1(\bar{v})$  ist in Abb. 4 wiedergegeben.

Die Integration der Beziehung (22) hängt wesentlich von  $\bar{v}_0$  und dem Verhältnis  $A/A_c$  ab, wo das kritische Feld  $A_c$  definiert ist durch

$$A_c = (\bar{v}^2 q_1(\bar{v}))_{\max}.$$

Wir unterscheiden folgende Fälle.

1.  $\bar{v}_0 = 0$ ;  $A < A_c$ . In diesem Fall besitzt das Integral (22) eine Divergenzstelle für  $\bar{v} = v_a$ . Mit der Annäherung an diese Geschwindigkeit wächst die Koordinate  $z$  über alle Grenzen. Die Elektronen er-

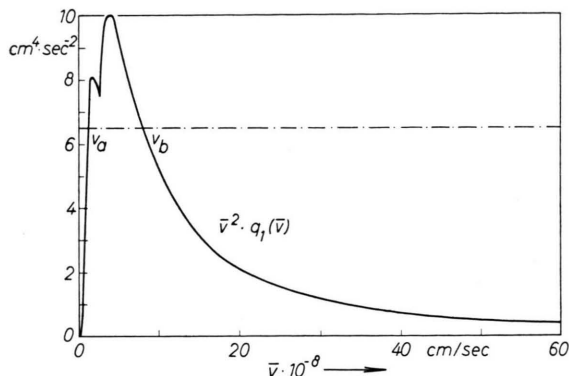


Abb. 4. Stoßbremsung der Elektronen im Heliumgas, charakterisiert durch die Funktion  $\bar{v}^2 q_1(\bar{v})$ . Die Feldbeschleunigung  $\dots\dots$  ist durch die Wahl des Parameters  $E T/p = 3,6 \cdot 10^4$  V·°K/cm·Torr bestimmt.

reichen dann einen stationären Bewegungszustand, die Driftbewegung. Die Driftbewegung selbst kann allerdings wegen der Voraussetzung (19) nicht durch unser Verfahren beschrieben werden.

2.  $\bar{v}_0 = 0$ ;  $A > A_c$ . In diesem Fall tritt keine Divergenzstelle mehr auf. Die Geschwindigkeit wächst stetig mit der Koordinate an. Die Elektronen erreichen keinen stationären Zustand, da die Feldbeschleunigung die Stoßbremsung immer überwiegt. Es bilden sich *run-aways*<sup>11, 12</sup> oder Strahlelektronen.

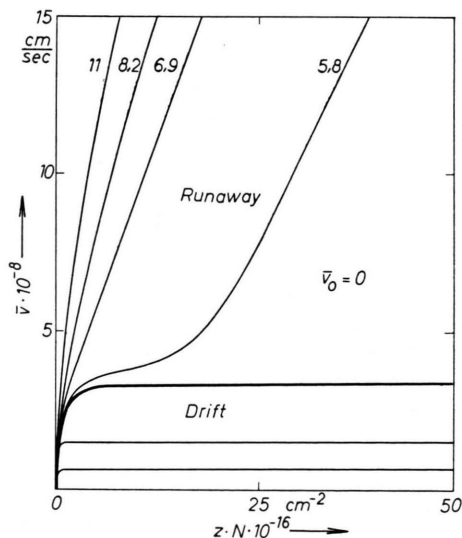


Abb. 5. Mittlere Elektronengeschwindigkeit im Heliumgas als Funktion des Ortes. Die dick ausgezogene Kurve trennt den Bereich der Driftbewegung und der *run-aways*. Parameter:  $E T/p$  in  $10^4 \cdot \text{V} \cdot \text{°K/cm} \cdot \text{Torr}$ .

<sup>9</sup> S. D. GYOSDOVER, Phys. Z. Sowj.-Union **12**, 269 [1939].

<sup>10</sup> H. S. W. MASSEY u. E. H. S. BURHOP, Electronic and Ionic Impact Phenomena, Clarendon Press, Oxford 1952.

<sup>11</sup> H. DREICER, Phys. Rev. **115**, 238 [1959]; **117**, 329 [1960].

<sup>12</sup> E. R. HARRISON, J. Nucl. Energy C **1**, 105 [1960].

Das unter Fall 1. und 2. beschriebene Verhalten zeigt Abb. 5.

3.  $A_c > A$ ;  $0 \leq \bar{v}_0 < v_a$ . Hier werden die Elektronen wie im Fall 1. von einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit bis zum stationären Driftprozeß beschleunigt.

4.  $A_c > A$ ;  $v_a < \bar{v}_0 < v_b$ . In diesem Bereich überwiegt die Stoßbremsung im Gas die Beschleunigung durch das Feld, und die Elektronen werden zur Driftbewegung abgebremst.

5.  $A_c > A$ ;  $\bar{v}_0 > v_b$ . In diesem Gebiet wächst die Geschwindigkeit der Elektronen wieder unbegrenzt an (*run-aways*). Es ist bemerkenswert, daß dies auch bei sehr kleinen Feldern auftreten kann, vorausgesetzt, daß  $\bar{v}_0$  hinreichend groß ist.

Die Fälle 3.–5. sind in Abb. 6 demonstriert.

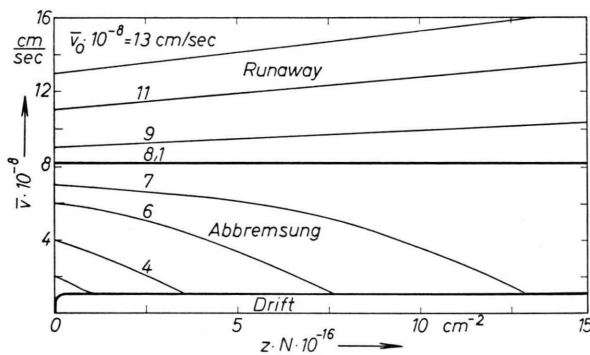


Abb. 6. Die mittlere Elektronengeschwindigkeit im Heliumgas als Funktion des Ortes für verschiedene Werte der Anfangsgeschwindigkeit. Der gewählte Parameter  $E T/p = 3,6 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot ^\circ\text{K}/\text{cm} \cdot \text{Torr}$  liegt unterhalb des kritischen Wertes.

6.  $A_c < A$ ;  $\bar{v}_0 \geq 0$ . Dieses Verhalten bedarf keiner besonderen Diskussion, da es in 2. einbezogen ist.

Wir fassen zusammen:

Zwei Arten von nichtstationären Zuständen sind zu unterscheiden. Einerseits können die Elektronen einen Anlaufvorgang zur stationären Drift hin durchführen. Andererseits können die Elektronen unbegrenzt beschleunigt werden. Driftvorgänge treten grundsätzlich nur unterhalb einer kritischen elektrischen Feldstärke ( $A < A_c$ ) auf. Je nachdem, ob die Anfangsgeschwindigkeit im Bereich  $0 \leq \bar{v}_0 < v_a$  oder  $v_a < \bar{v}_0 < v_b$  liegt, wird der Driftprozeß mit wachsender oder abnehmender Geschwindigkeit erreicht. Für  $A > A_c$  treten in jedem Fall unbegrenzte Beschleunigung und damit *run-aways* oder Strahl-elektronen auf. Im Fall  $A < A_c$  finden wir *run-away*- und Strahlbildung nur im Bereich  $\bar{v}_0 > v_b$ .

## Das Streuellipsoid

Um die Größen  $s_{x,z}$  zu berechnen, benutzen wir die Gl. (1) in Anwendung auf  $\Phi = v^2, v_x^2$ . Unter Verwendung der Ergebnisse (2) – (11) erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial z} (n \bar{v}_z v^2) + 2 n \frac{e}{m} E \bar{v}_z = -2 n N \left( \frac{m}{M} \bar{v}^3 - \bar{V}^2 \bar{v} \right) \cdot q_1(\bar{v}) - n N \bar{v}^3 q_0(\bar{v}), \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (n \bar{v}_z v_x^2) = -2 n N \left( \frac{m}{M} \bar{v}_x^2 \bar{v} - \bar{V}_x^2 \bar{v} \right) \cdot q_1(\bar{v}) + \frac{1}{3} n N (\bar{v}^3 - 3 \bar{v}_x^2 \bar{v}) q_2(\bar{v}). \quad (24)$$

Zerlegen wir  $\bar{v}$  und  $\bar{v}_z$  in der Form

$$\bar{v} = \bar{v} + \Delta \bar{v}, \quad \bar{v}_z = \bar{v} + \Delta v_z \quad (25)$$

und vernachlässigen wir Glieder höherer Ordnung, so finden wir

$$\bar{v}_z v^2 = \bar{v} [\bar{v}^2 + 2 s_x^2 + 3 s_z^2]. \quad (26)$$

Verwenden wir dies zusammen mit der Kontinuitätsgleichung ( $\Phi = 1$ ) und (20) in (23), so ergibt sich

$$\frac{d}{d(zN)} [2 s_x^2 + 3 s_z^2] = \bar{v}^2 \cdot \left\{ 2 q_1 \left( 1 - \frac{m}{M} \right) - q_0 \right\} - 2 \bar{v}^2 q_1. \quad (27)$$

Eine entsprechende Behandlung der Gl. (24) liefert

$$\frac{d}{d(zN)} s_x^2 = -s_x^2 \left\{ 2 \frac{m}{M} q_1 + q_2 - q_0 \right\} + \bar{V}_x^2 \{ 2 q_1 - q_0 \} + \frac{\bar{v}^2}{3} q_2. \quad (28)$$

Unter Beachtung unserer Voraussetzungen und der Beziehung

$$q_1 \approx q_2 > q_0 \quad (29)$$

lassen sich die Gln. (27), (28) in die Form

$$\frac{d}{d(zN)} s_x^2 = \frac{1}{3} \bar{v}^2 q_2(\bar{v}), \quad (30)$$

$$\frac{d}{d(zN)} s_z^2 = \frac{1}{3} \bar{v}^2 (2 q_1 - q_0 - \frac{2}{3} q_2) \quad (31)$$

umformen.

Die maschinelle Auswertung der Beziehungen (30) und (31) liefert uns die Achsen des Streuellipsoids  $s_{x,z}$  als Funktion des Ortes. Charakteristisch ist das Verhältnis  $s_{x,z}^2/\bar{v}^2$ , welches wir im folgenden stets zur Kennzeichnung verwenden wollen.

Wegen unserer Voraussetzungen werden wir unsere Rechnungen nur bis zu einem oberen Grenzwert  $s_{x,z}^2/\bar{v}^2 = \gamma = 1/3$  treiben. Die zugehörigen Strecken  $l_{x,z}$  sollen als Kenngrößen für die Defokussierung der gerichteten Elektronenbewegung dienen.

Wir betrachten zunächst Elektronen, die mit der Anfangsgeschwindigkeit  $\bar{v}_0 = 0$  losgehen und eine stationäre Driftbewegung erreichen. Erwartungsgemäß wächst die relative Streuung mit dem Ort monoton an. Die Kenngrößen  $l_{x,z}$  erweisen sich praktisch im gesamten Bereich  $A < A_c$  als konstant. Die Rechnung ergibt

$$l_x N = 0,25 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}; \quad l_z N = 0,21 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}.$$

Auf die Interpretation dieser Kenngrößen  $l$  im Zusammenhang mit den Einstellstrecken des Driftprozesses kommen wir unten zurück.

Wir haben eine entsprechende Rechnung durchgeführt für die Streuung von Elektronenstrahlen endlicher Anfangsgeschwindigkeit in einem feldfreien Raum ( $A=0$ ). Die auf diese Weise bestimmten Kenngrößen  $l_{x,z}$  sind in Abb. 7 wiedergegeben.

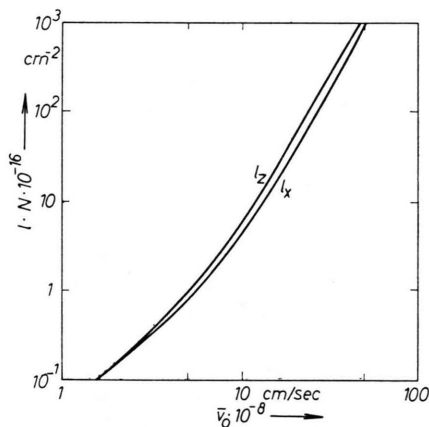


Abb. 7. Defokussierungslängen  $l_x$ ,  $l_z$  für Elektronenstrahlen in Heliumgas als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit. Der Raum ist feldfrei vorausgesetzt,  $E T/p = 0$ .

Wesentlich interessanter liegen die Verhältnisse bei den *run-away*-Elektronen. Das Resultat der Berechnung für  $\bar{v}_0 = 0$ ;  $A > A_c$  ist in den Abb. 8 und 9 dargestellt. Die Kurven zeigen grundsätzlich alle den gleichen Verlauf. Die Streuung wächst an, erreicht ein Maximum und fällt später wieder auf kleine Werte ab. Die Elektronen zeigen einen Fokussierungseffekt im Geschwindigkeitsraum. Die Abbildungen lassen eine bevorzugte Streuung in der  $x$ -Richtung erkennen. Das Streuellipsoid ist in der Richtung senkrecht zur Bewegung abgeplattet.

Analoge Berechnungen für *run-away*-Elektronen in schwachen, elektrischen Feldern ( $A < A_c$ ;  $\bar{v}_0 > v_b$ ) liefern das Ergebnis der Abb. 10. Die Kurven zeigen einen zu Abb. 8, 9 entsprechenden Verlauf. Auch

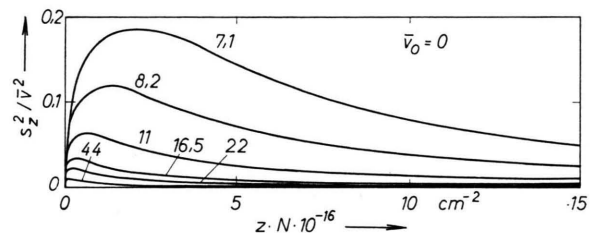
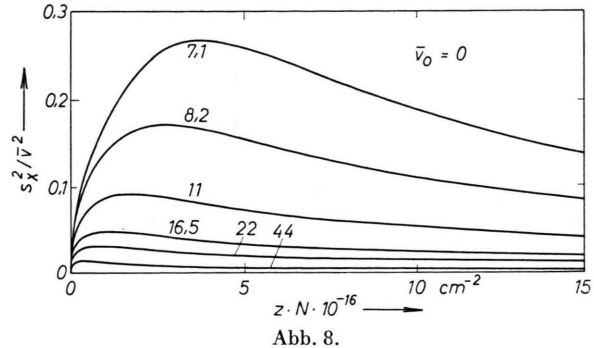


Abb. 8 u. 9. Die relativen Geschwindigkeitsstreuungen  $s_x^2/\bar{v}^2$  von im Feld beschleunigten Elektronen als Funktion des Ortes. Alle Feldparameter  $E T/p$  in  $10^4 \cdot \text{V} \cdot ^\circ\text{K}/\text{cm} \cdot \text{Torr}$  sind oberhalb des kritischen Wertes gewählt.

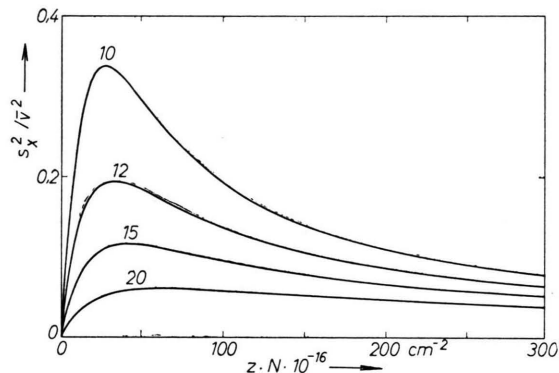


Abb. 10. Relative Geschwindigkeitsstreuung  $s_x^2/\bar{v}^2$  von Elektronenstrahlen verschiedener Anfangsgeschwindigkeit  $\bar{v}_0$  in  $10^8 \text{ cm/sec}$  als Funktion des Ortes. Der Feldparameter  $E T/p = 3,6 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot ^\circ\text{K}/\text{cm} \cdot \text{Torr}$  wurde unterhalb des kritischen Wertes gewählt.

hier ist ein Fokussierungseffekt im Geschwindigkeitsraum vorhanden.

## Folgerungen

Die Ergebnisse unserer Berechnung erlauben zuverlässige Aussagen über die Bildung und Beschleunigung von Elektronenstrahlen beliebiger Anfangsgeschwindigkeit in einem Gas unter dem Einfluß starker elektrischer Felder ( $A > A_c$ ). Sie erlauben

ferner die Beschreibung der Beschleunigung von Elektronenstrahlen genügend hoher Anfangsgeschwindigkeit ( $\bar{v}_0 > v_b$ ) in einem Gas unter dem Einfluß mäßiger, elektrischer Felder ( $A < A_c$ ).

Für mäßige Felder ( $A < A_c$ ) und Anfangsgeschwindigkeiten  $\bar{v}_0 < v_b$  lassen sich die Einstellvorgänge zur Drift analytisch verfolgen. Diese Einstellvorgänge enthalten die Abbremsung von Elektronenstrahlen im feldfreien Raum ( $A = 0$ ;  $\bar{v}_0 > 0$ ) als Spezialfall.

Wegen unserer Voraussetzungen kann die Beschreibung der genannten Einstellvorgänge nur innerhalb der Bereiche  $l_{x,z}$  beschrieben werden.

Die Größen  $l_{x,z}$ , die die Defokussierung der Elektronenbewegung angeben, dürfen nicht mit der Reichweite der Elektronenstrahlen oder der Einstellstrecke des Driftprozesses identifiziert werden. Es läßt sich jedoch ein Zusammenhang zwischen diesen Relaxationslängen und  $l_{x,z}$  herstellen.

Hierzu benötigen wir etwas genauere Kenntnis der Verteilungsfunktion. Bei kleinen Geschwindigkeiten trennt sich der ursprüngliche Strahl in zwei wesentlich verschiedene Gruppen. Die gestoßenen Teilchen der Dichte  $n_s$  zeigen infolge der Konstanz des differentiellen Wirkungsquerschnitts eine nahezu kugelsymmetrische Verteilung und tragen daher zur mittleren Geschwindigkeit nicht bei. Die ungestoßenen Teilchen,  $n_u$ , bewegen sich mit einer Geschwindigkeit  $v_u$  entsprechend der Feldbeschleunigung. Dieses Verhalten bedeutet eine Intensitätsschwächung des ursprünglichen Elektronenstrahles. Die relative Intensität  $n_u/(n_s + n_u)$  steht mit den Geschwindigkeiten  $\bar{v}$  und  $v_u$  in dem einfachen Zusammenhang

$$n_u/(n_s + n_u) = \bar{v}/v_u, \quad (32)$$

wo die Geschwindigkeiten  $\bar{v}$  und  $v_u$  den Berechnungen des Vorganges entnommen werden. Definieren wir als Relaxationsstrecke der Drift bzw. als Bremslänge eines gegebenen Elektronenstrahls diejenige Länge  $l_r$ , über die sich die Anfangsintensität der gerichteten Elektronenbewegung auf ein Zehntel vermindert, so erhalten wir in guter Näherung den Zusammenhang

$$l_r \approx 4 l_{x,z}.$$

Unsere Ergebnisse sind ferner fruchtbar in der Anwendung auf den Kathodenfall und das negative Glimmlicht der Glimmentladung. Die Frage der Elektronenbewegung im Fallgebiet ist häufig diskutiert worden. Bisher wurde nicht entschieden, ob und inwieweit die Annahme des freien Falls bzw.

der reinen Driftbewegung eine gute Näherung darstellen.

Um diese Frage aufgreifen zu können, haben wir für das Beispiel der Heliumentladung den linearen Feldverlauf im Kathodenfall unseren Berechnungen zugrunde gelegt. Das Ergebnis der Integration ist in Abb. 11 wiedergegeben. Wie diese Daten erkennen

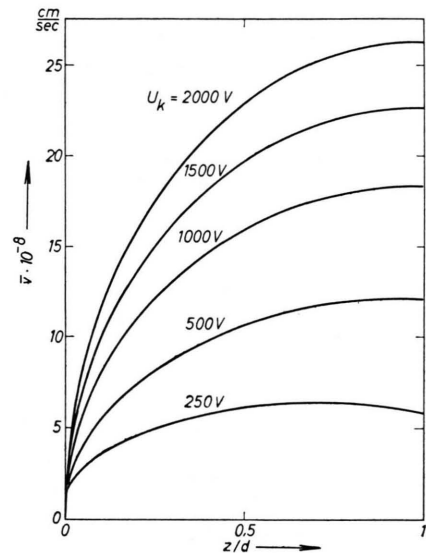


Abb. 11. Die mittlere Elektronengeschwindigkeit  $\bar{v}$  im Fallgebiet einer Helium-Glimmentladung als Funktion des Ortes für verschiedene Werte des Kathodenfalles  $U_k$ . Die Ausdehnung des Kathodenfallgebietes ist mit  $d$  bezeichnet.

lassen, ist die Verwendung der Driftvorstellung nicht gerechtfertigt. Der freie Fall stellt eine gute Näherung nur im Bereich extrem hoher, anomaler Kathodenfälle dar. Die berechneten Bewegungskurven erlauben zusammen mit dem bekannten, differentiellen Ionisierungskoeffizienten eine Aussage über die Ionenerzeugung.

Für den normalen Kathodenfall zeigt die Rechnung im inhomogenen Feld, daß  $l_{x,z} \approx d/2$  gilt, wo  $d$  die Ausdehnung des Kathodenfallgebietes kennzeichnet. Ein wesentlicher Anteil der an der Kathode befreiten Elektronen erreicht also den Glimmsaum als Strahlelektronen. Wegen der Bedeutung der Strahlelektronen für das Glimmlicht kann der Mechanismus der Glimmentladung nur bestehen, wenn  $l_{x,z}$  von der gleichen Größenordnung wie  $d$  oder größer ist.

Wir danken Herrn Dr. P. F. MÜLLER vom Rheinisch-Westfälischen Institut für Instrumentelle Mathematik für seine Unterstützung bei der Durchführung der Rechnung und Herrn Dipl.-Physiker O. ZÖLLER für seine Hilfe bei der Auswertung.